## Тема 1.5. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

**1.5.1. Постановка задачи**

**1.5.2. Метод Эйлера**

**1.5.3.Методы Рунге-Кутты**

**1.5.4. Решение ОДУ n-го порядка**

**1.5.5. Сравнение методов решения ОДУ**

**1.5.6. Тестовые задания по теме «Методы решения ОДУ»**

### **1.5.1. Постановка задачи**

Любое физическое явление, в котором рассматривается степень изменения одной переменной по отношению к другой переменной, математически описывается **дифференциальным уравнением** (**ДУ**). Из курса высшей математики известно множество аналитических методов, позволяющих найти их решения. Однако, в некоторых случаях, например, если функция или коэффициенты **ДУ** представляют собой таблицу экспериментально полученных данных, использование аналитических методов невозможно.

Рассмотрим ряд численных методов, позволяющих без проведения сложных математических вычислений найти с заданной точностью решения **обыкновенных дифференциальных уравнений** (**ОДУ**).

Из курса математического анализа известно, что ***обыкновенным***называется такое дифференциальное уравнение от одной переменной, которое содержит одну или несколько производных от искомой функции y(x). В общем виде **ОДУ** можно представить следующим образом:

 (1.5.1-1)

где х – независимая переменная, а n – порядок **ОДУ**.

Численные методы позволяют решить только **ОДУ** **1**-го порядка, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только такие уравнения. Следует отметить, что **ОДУ** n-го порядка можно привести к системе из n уравнений **1**-го порядка, и при решении системы применить те же методы.

Известно, что для **ОДУ 1**-го порядка справедливы следующие формы записи:



Вторая форма записи называется **ОДУ**, разрешенным относительно старшей производной.

Решением **ОДУ** первого порядка называется такая функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. При этом различают общее и частное решения **ОДУ**.

Общее решение **ОДУ** содержит n произвольных постоянных С1, С2, . . .,Сn и имеет следующий вид:



Общее решение **ОДУ** первого порядка содержит одну произвольную постоянную   
y = ϕ(x,C**)** и описывает множество функций, удовлетворяющих уравнению y′ = f(x,y**)**    
(рис. 1.5.1-1).



Рис. 1.5.1-1

Если произвольная постоянная принимает конкретное значение С=С0, то из общего решения **ОДУ**, в соответствии с теоремой Коши, получаем частное решение y = ϕ(x,C0), поскольку через каждую точку (x0, y0) в области допустимых значений проходит только одна интегральная кривая.

**Теорема Коши** для **ОДУ 1**-го порядка звучит так:

*Если в ОДУ функция* y′ = f(x,y) *и ее частная производная* f′ (x,y**)** *определены и непрерывны в некоторой области* G *изменения переменных* x *и* y*, то для всякой внутренней точки* **(**x0, y0**)** *этой области данное уравнение имеет единственное решение.*

Значения x0, y0 называются **начальными условиями**. Для **ОДУ 2**-го порядка, общее решение которого имеет две произвольные постоянные, в качестве начальных значений выступают x0, y0 = ϕ(x0) и y0′=φ′ (x0).

При решении **ОДУ** точным решением является аналитическое выражение функции   
y = ϕ(x)**,** а результатом решения **ОДУ** численными методами является таблица значений   
y = ϕ(x**)** на некотором множестве значений аргумента х. Поэтому при постановке задачи численного решения **ОДУ** наряду с начальными условиями x0, y0 необходимо задать область решения - отрезок [a;b] и шаг изменения аргумента h.

Таким образом, численное решение **ОДУ** представляет собой таблицу значений искомой функции для заданной последовательности аргументов, xi+1=xi+h, i=0, 1, …,n, где

h = xi+1-xi называется шагом интегрирования.

Выделяют два класса методов решения **ОДУ**: одношаговые и многошаговые. В одношаговых методах для нахождения следующего значения функции требуется значение только одной текущей точки, то есть



а в многошаговых – нескольких, например



Начинать решение задачи Коши многошаговыми методами нельзя, поэтому начинают решение, используя всегда одношаговые методы.

Основная идея решения **ОДУ** одношаговыми методами сводится к разложению искомого решения y(x) в ряд Тейлора в окрестности текущей точки и его усечению. Число оставшихся членов ряда определяет порядок и, следовательно, точность метода.

Рассмотрим наиболее распространенные одношаговые численные методы решения **ОДУ**.

### **1.5.2. Метод Эйлера**

Пусть дано уравнение

y′=f(x,y), (1.5.2-1)

с начальными условиями x0, y0 = y(x0). Требуется найти решение данного уравнения на отрезке [a;b] (обычно x0=а) в n точках.

На рис. 1.5.2-1 график искомой функции y(x) проходит через точку А(x0,y0), заданную начальными условиями.



Рис. 1.5.2-1

Разобьем отрезок на **n** равных частей и получим последовательность x0,x1,…, xn, где xi=x0+i∙h (i=0, 1, …,n), а h = (b-a)/n – шаг интегрирования.

Найдем yi = y(xi). Для этого проинтегрируем производную, заданную (1.5.2-1) на интервале [x0;x1], по формуле Ньютона – Лейбница:



Отсюда значение искомой функции в точке x1



Примем допущение, что на интервале [x0;x1]производная исходной функции постоянна и равна своему значению в точке А(x0,y0). Тогда по формуле прямоугольников



Полученное выражение имеет наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 1.5.2-1) . Поскольку значение производной f’(x0,y0) = tgα, то в прямоугольном треугольнике ABD Δy0=h⋅tgα, и, следовательно, y1 = y0+Δy0 = y0+h⋅f′(x0,y0). Таким образом, y1 может быть найдено геометрически в результате замены искомой кривой y(x) касательной, проведенной в точке А.

Продолжая этот процесс и принимая подынтегральную функцию f(x) на соответствующем участке [xi,xi+1] постоянной и равной ее значению в начале отрезка, получим решение дифференциального уравнения в виде значений искомой функции y(x) на отрезке [a;b]. График решения представляет собой ломаную линию, которая называется ломаной Эйлера. При этом общая формула для определения очередного значения функции имеет вид:

 (1.5.2-2)

Метод Эйлера является сравнительно грубым и применяется на практике в основном для проведения ориентировочных расчетов.

Погрешность метода Эйлера связана с величиной шага интегрирования отношением **e1 =C1h2**, где **C1** – произвольная постоянная.

**Пример 1.5.2-1. Решить методом Эйлера ОДУ y′= 2x/y с начальными условиями x0 = 1 и y0 = 1 на отрезке [1;1.4] с шагом h = 0.2.**

|  |
| --- |
|  |

### **1.5.3. Методы Рунге-Кутты**

Методы **Рунге-Кутты** – это группа методов, широко применяемых на практике для решения ОДУ. В этих методах при вычислении значения искомой функции в очередной точке хi+1 используется информация о предыдущей точке хi, yi. Методы различаются объемом вычислений и точностью результата.

**Порядок** **метода Рунге-Кутты** определяется кратностью вычисления значения производной искомой функции f(x,y**)** на каждом шаге. В соответствии с этим **метод Эйлера** является методом Рунге-Кутты первого порядка, поскольку для получения очередного значения yi+1 функция f(x) вычисляется один раз в предыдущей точке хi, yi. В методах **Рунге-Кутты** более высоких порядков для вычисления очередного значения искомой функции в точке хi+1 значение правой части уравнения y’= f(x,y**)** вычисляется несколько раз, количество которых и определяет порядок метода.

**Метод Рунге-Кутты 2-го порядка (Усовершенствованный метод Эйлера*).*** Вычисление значения искомой функции в точке хi+1 проводится в два этапа. Сначала вычисляют вспомогательную величину  по методу **Эйлера**:

 (1.5.3-1)

Затем значение производной искомой функции в точке (xi+1,yi+1) используется для вычисления окончательного значения функции:

 (1.5.3-2)

Подставляя (1.5.3-1) в (1.5.3-2), окончательно получим расчетную формулу метода **Рунге-Кутты 2**-го порядка:

 (1.5.3-3)

Этот метод также называют методом **прогноза и коррекций**. Сначала находят грубое приближение  по методу Эйлера (прогноз), а затем уточненное значение yi+1 (коррекция).

В общем виде формулу (1.5.3-3) можно представить как

 (1.5.3-4)

Метод Рунге-Кутты второго порядка имеет наглядную **геометрическую интерпретацию** (рис. 1.5.3-1). Построение проводится следующим образом:  определяется пересечением перпендикуляра, восстановленного из точки xi+1 c касательной L1, проведенной к кривой y(x) в предыдущей точке (хi,yi). Затем в точке  проводится прямая L2 с тангенсом угла наклона, равным . Прямую  проводят через точку  под углом, тангенс которого находим усреднением значений тангенсов углов наклона L1 и L2. Прямая L проводится параллельно  через точку (хi,yi). Ее пересечение с перпендикуляром, восстановленным из точки хi+1, и дает уточненное значение yi+1.

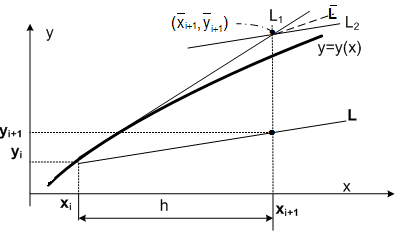


Рис. 1.5.3-1

Погрешность метода **Рунге-Кутты** второго порядка связана с величиной шага интегрирования отношением e2 =C2h3, где C2– произвольная постоянная.

**Пример 1.5.3-1. Решить методом Рунге-Кутты второго порядка ОДУ y′= 2x/y с начальными условиями x0 = 1 и y0 = 1 на отрезке [1;1.4] и шагом h = 0.2.**



Проводя дальнейшее обобщение формул **Рунге-Кутты,** для решения **ОДУ** первого порядка можно записать следующее:



где Ф – линейная функция аргументов x, y, h и f(x,y), которая может быть представлена как

 (1.5.3-5)

Величина n в (1.5.3-4) определяется порядком метода, а коэффициентам α2,α3, … ,αn, Р1, Р2, … ,Pn подбирают такие значения, которые обеспечивают минимальную погрешность. Так, для метода **Рунге-Кутты** четвертого порядка (n=4) получена расчетная формула при следующих коэффициентах: α2= α3=1/2, α4=1, P1 = P4=1/6, P2 = P3 =2/6.

Подставив значения коэффициентов в (1.5.3-4), имеем

 (1.5.3-6)

Геометрическая интерпретация этого метода очень сложна и потому не приводится.

Погрешность метода **Рунге-Кутты** четвертого порядка значительно меньше методов первого и второго порядков и пропорциональна величине h (e4 =C4h5).

**Пример 1.5.3-2. Решить методом Рунге-Кутты четвертого порядка ОДУ y′= 2x/y с начальными условиями x0 = 1 и y0 = 1 на отрезке [1;1.4] с шагом h = 0,2.**

|  |
| --- |
|  |

Сведем в таблицу результаты решения уравнения y′=2x/y методами **Рунге-Кутты**, соответственно, первого (y1i), второго (y2i) и четвертого (y4i) порядков и сравним с результатами, полученными точным методом (yi).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **хi** | **y1i** | **y2i** | **y4i** | **yi** |
| 1  1.2  1.4 | 1  1.4  1.74286 | 1  1.3714  1.7091 | 1  1.37115  1.7089 | 1  1.37113  1.7088 |

На практике для обеспечения требуемой точности (при использовании любого приближенного метода решения **ОДУ**) применяется ***автоматический выбор шага методом двойного просчета***. При этом в каждой точке хi по формуле, соответствующей выбранному методу, производится расчет yi с шагом h (yi(h))и с шагом h/2 (yi(h/2)). Цель двойного просчета состоит в том, чтобы для каждой точки численного решения эти значения отличались на величину, не превышающую заданной погрешности ε. В этом случае общая формула для оценки погрешности решения **ОДУ** методами **Рунге-Кутты** имеет следующий вид:



где p – порядок метода **Рунге-Кутты**. Эта формула называется также правилом **Рунге**.

Если | yi(h))- yi(h/2)|< ε, то шаг для следующей точки выбирается равным h, иначе шаг уменьшается вдвое и продолжается уточнение y i в точке хi.

Схемы алгоритмов интегрирования **ОДУ** методом **Рунге-Кутты** с автоматическим выбором шага приведены на рис. 1.5.3-2 и рис. 1.5.3-3.

|  |
| --- |
|  |

Рис. 1.5.3-2. Схема алгоритма процедуры-функции решения ОДУ в очередной точке

|  |
| --- |
|  |

Рис. 1.5.3-3. Схема алгоритма интегрирования ОДУ методом Рунге-Кутты с

автоматическим выбором шага

### 

### **1.5.4. Решение ОДУ n-го порядка**

Методы, рассмотренные выше, позволяют найти численное решение **ОДУ** только первого порядка. Однако они применимы и к уравнениям **n**-го порядка. Для этого **ОДУ**  **n**-го порядка предварительно приводится к системе **n** уравнений первого порядка.

Пусть, например, требуется решить **ОДУ** второго порядка

**,**

с начальными условиями , , .

Обозначим ****z=y’**.** В результате подстановки в исходное уравнение получим систему двух уравнений первого порядка

,

с двумя неизвестными функциями  и  и начальными условиями

, ****.

В общем виде система уравнений может быть представлена в виде

 (1.5.4-1)

Решением системы (1.5.4-1) являются две функции  и , из которых - решение исходного уравнения второго порядка. Выбрав, например, метод **Эйлера**, приближенное решение системы (1.5.4-1) можно найти с помощью двух рекуррентных формул:



**Пример 1.5.4-1. Дано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка  при начальных условиях , ,  на отрезке [0;0.4] с шагом .**

Обозначим , тогда **ОДУ** второго порядка можно записать в виде системы **ОДУ** первого порядка

 с начальными условиями , , .

Применим метод **Эйлера** для решения системы **ОДУ**



и т.д.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **xi** | **yi** | **zi** |
| 0 | 1 | 2 |
| 0.2 | 1.4 | 1.6 |
| 0.4 | 1.72 | 1.808 |

В общем виде **ОДУ** n-го порядка

.

Введем следующие обозначения:

**…**

В результате этих подстановок перейдем к системе n ОДУ первого порядка:

 (1.5.4-2)

Решением системы (1.5.4-2) являются функции 

При заданных начальных условиях ,  и использовании метода **Эйлера** решение может быть получено с помощью рекуррентных формул



Окончательным решением **ОДУ** n-го порядка, согласно определению, служит функция , вычисленная на заданном множестве точек [a;b].

### **1.5.5. Сравнение методов решения ОДУ**

Метод **Эйлера** является простейшим одношаговым методом. Однако его низкая точность (погрешность убывает пропорционально величине шага) служит серьезным препятствием для его использования на практике. Увеличение точности за счет уменьшения шага, к сожалению, приводит к росту количества итераций и соответственно увеличению ее составляющей погрешности – погрешности вычисления. Метод имеет первый порядок точности, соответствующий используемому в нем методу левых прямоугольников.

Метод «**прогноза и коррекции**» позволяет уточнить расчетную формулу за счет «прогноза» значения в следующей точке, полученного на первом этапе по формуле **Эйлера**, и «коррекции» - усреднения углового коэффициента – на втором этапе. Этот метод имеет второй порядок точности, поскольку для вычисления интеграла при вычислении приращения использована формула трапеций. По сравнению с методом **Эйлера**, метод «прогноза и коррекции» требует меньшее количество итераций для обеспечения заданной точности

Наиболее популярными среди классических одношаговых методов решения **ОДУ** являются методы **Рунге-Кутты** четвертого порядка. При этом метод **Эйлера** и метод «**прогноза и коррекции**» можно рассматривать как простейших представителей методов **Рунге-Кутты**. Методы **Рунге-Кутты** четвертого порядка эффективны и, если отрезок интегрирования не очень велик, обеспечивают сравнительно высокую точность.

Обеспечение требуемой точности решения **ОДУ** достигается применением в расчетах метода автоматического выбора шага, в котором для оценки локальной погрешности (погрешности на каждом шаге решения) используется правило Рунге.

### **1.5.7. Тестовые задания по теме «Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений»**

1. **Обыкновенное дифференциальное уравнение – это**
2. дифференциальное уравнение от одной переменной
3. дифференциальное уравнение первого порядка
4. дифференциальное уравнение n-ого порядка
5. в списке нет правильного ответа
6. **Порядок ОДУ это**
7. количество производных, входящих в состав уравнения
8. наивысший порядок производной, входящей в состав уравнения
9. количество неизвестных, входящих в состав ОДУ
10. в списке нет правильного ответа
11. **Общим решением ОДУ является**
12. 
13. таблица значений искомой функции
14. 
15. в списке нет правильного ответа
16. **Частным решением ОДУ является**
17. 
18. таблица значений искомой функции
19. в списке нет правильного ответа
20. 
21. **Численным решением ОДУ  является**
22. 
23. таблица значений искомой функции
24. 
25. в списке нет правильного ответа
26. ** - эта формула используется для определения очередного значения функции по методу**
27. Рунге-Кутты 2-го порядка
28. Рунге-Кутты 4-го порядка
29. Рунге-Кутты 1-го порядка
30. в списке нет правильного ответа
31. **Уменьшение шага интегрирования при использовании методов Рунге-Кутты**
32. увеличивает погрешность
33. не влияет на погрешность
34. в списке нет правильного ответа
35. уменьшает погрешность
36. **Очередная точка решения ОДУ методом Рунге-Кутты вычисляется на основании**
37. одного предыдущего значения функции
38. двух предыдущих значений функции
39. трех предыдущих значений функции
40. всех предыдущих значений функции
41. **Применение переменного шага является**
42. невозможным в методах Рунге-Кутты
43. возможным во всех методах Рунге-Кутты
44. возможным только в методе Рунге-Кутты 4-го порядка
45. возможным только в методе Эйлера
46. **Погрешность метода Эйлера пропорциональна**
47. шагу
48. шагу, возведенному в куб
49. шагу, возведенному в квадрат
50. двум шагам
51. **Чтобы применить методы Рунге-Кутты при решении ОДУ 2-го порядка нужно**
    1. привести ОДУ 2-го порядка к ОДУ 1-го порядка
    2. иметь информацию о двух начальных точках решения
    3. в списке нет правильного ответа
    4. привести ОДУ 2-го порядка к системе ОДУ 1-го порядка
52. **В формуле оценки погрешности при использовании метода автоматического выбора шага порядок используемого метода Рунге-Кутты**
53. учитывается с помощью коэффициента, равного порядку метода
54. учитывается в расчетных формулах используемого метода
55. не учитывается
56. в списке нет правильного ответа
57. **Для увеличения точности решения ОДУ количество итераций в методе автоматического выбора шага**
58. увеличивается
59. уменьшается
60. не меняется
61. накапливается
62. **Не зная точного решения, оценить погрешность решения ОДУ**
63. все ответы верны
64. можно с использованием правила Рунге
65. можно с использованием метода автоматического выбора шага
66. можно с использованием метода двойного просчета
67. **Метод решения ОДУ, в котором подынтегральная функция на отрезке аппроксимируется интерполяционным многочленом 1-го порядка, а затем интегрируется методом прямоугольников, это**
68. метод Рунге-Кутты 3-го порядка
69. метод Эйлера
70. модифицированный метод Эйлера
71. метод Рунге-Кутты 4-го порядка
72. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Эйлера на отрезке [0;0.4] с шагом  является:**
    1. 
    2. 
    3. 
    4. 
73. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Эйлера на отрезке [0;0.4] с шагом  является**
74. 
75. 
76. 
77. 
78. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Эйлера на отрезке [0;1] с шагом  является**
79. 
80. 
81. 
82. 
83. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Эйлера на отрезке [0;2] с шагом  является**
84. 
85. 
86. 
87. 
88. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Рунге- Кутты 2-го порядка в точке х=0.2 является**
89. 2.98
90. 0.87
91. 3.89
92. 1.24
93. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Рунге -Кутты 2-го порядка в точке х=0.3 является**
94. 0.045
95. 0.9
96. -0.78
97. 0
98. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Рунге-Кутты 2-го порядка в точке х=0.1 является**
99. 1.98
100. 1.005
101. 3.56
102. 4.67
103. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Рунге- Кутты 2-го порядка в точке х=0.1 является**
104. 2.56
105. 8.48
106. 1.121
107. 2.75
108. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Рунге- Кутты 2-го порядка в точке х=0.5 является**
109. 3.001
110. 2.142
111. 4.145
112. 1.781
113. **Значение погрешности в точке х=0.5 при решении ОДУ  с начальными условиями  (h=0.5) методом Эйлера, равно**
114. 0.149
115. 0.001
116. 0.780
117. 1.765
118. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Рунге- Кутты 4-го порядка в точке х=0.5 является**
119. 1.797
120. 0.454
121. 1.001
122. 0.965
123. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Рунге Кутты 4-го порядка в точке х=0.3 является**
124. 0
125. 0.045
126. 1
127. 2.876
128. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Рунге-Кутты 4-го порядка в точке х=0.5 является**
129. 2.5
130. 3.015
131. 1.016
132. -1.5
133. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Рунге-Кутты 4-го порядка в точке х=2.1 является**
134. 3.1
135. 1.2
136. 4.2
137. 2.1
138. **Решением ОДУ  с начальными условиями  методом Рунге- Кутты 4-го порядка в точке х=1.5 является**
139. 2.762
140. 0.786
141. 1.760
142. 4.654